ПРИМЕНЕНИЕ ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ФУНКЦИОНАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ И НЕРАВЕНСТВАМ

Сабирова Р.

Сабирова Раъно – преподаватель,
кафедра высшей математики,
Бухарский инженерно-технологический институт, г. Бухара, Республика Узбекистан

Аннотация: *в этой статье представлены некоторые приложения основных терминов дифференциального исчисления.*

Ключевые слова: *функция, уравнение, система, преобразование, переменная.*

Примеры и решение задач лежат в основе математического образования. В систему образования страны был внесен ряд реформаторских изменений, основной целью которых является выявление, открытие и создание условий и возможностей для развития способностей (одаренности) и талантов учащихся. Из науки математического анализа нам известны такие понятия, как непрерывность функций, производная функций, дифференциал функций, а также их геометрические и механические значения см. [1 - 6].

В этой статье мы представляем приложение основных теорем дифференциального исчисления к функциональным уравнениям и неравенствам. Эти результаты могут быть широко использованы для решения уравнений, неравенств и многих других важных задач в будущем. Есть несколько приложений этих теорем, и многие проблемы могут быть легко решены с их введением.

Применяем их к следующим вопросам.

Пример 1. Докажите, что если нелинейная функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$, а на интервале имеет конечную производную $f'(x)$. Тогда между a и b существует точка c ($a<c<b$) такая, что выполняется неравенство

$$|f'(c)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right| \qquad (1)$$

Решение: Разделим отрезок $[a;\ b]$ произвольным образом на n части: $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$. На каждом отрезке $[x_k;\ x_{k+1}],\ k=\overline{0,n-1}$ функция $f(x)$ удовлетворяет условию теоремы Лагранжа. Тогда между x_k и x_{k+1} есть точка ξ_k $\left(x_k<\xi_k<x_{k+1},\ k=\overline{0,n-1}\right)$ для которой выполняется равенство $f'(\xi_k)=\dfrac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}$.

Введем обозначения $x_{k+1}-x_k=\Delta x_k$ и получим

$$f(b)-f(a)=\sum_{k=0}^{n-1}\left[f(x_{k+1})-f(x_k)\right]=\sum_{k=0}^{n-1}f'(\xi_k)\Delta x_k. \qquad (2)$$

Введем обозначения $|f'(c)|=\max\limits_k\{f'(\xi_k)\},\ c\in(a;\ b)$ и из (2) получим

$$|f(b)-f(a)|=\left|\sum_{k=0}^{n-1}f'(\xi_k)\Delta x_k\right|\le\sum_{k=0}^{n-1}|f'(\xi_k)|\Delta x_k\le|f'(c)|\sum_{k=0}^{n-1}\Delta x_k=|f'(c)|\cdot|b-a|\cdot$$

Из последнего следует

$$|f'(c)|\ge\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

Пример 2. Пусть 1) $f(x)$ функция имеет производную второго порядка на отрезке $[a;\ b]$; 2) на концах интервала функция принимает равные значения и равна нулю, т.е. $f'(a)=f'(b)=0$. Затем докажите, что между a и b существует точка c ($a<c<b$) такая, что

$$|f''(c)| > \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)| \qquad (3)$$

Решение: Пусть $f(x)$ функция имеет производную второго порядка по $[a;b]$ и $f'(a)=f'(b)=0$. Докажите, что между a и b есть точка c такая, что верно следующее соотношение:

1) Пусть $f(x)=\mathrm{const}$. В этом случае равенство (3) выполняется для любого с из (a; b).

2) Пусть $f(x)$ линейная функция. В этом случае условие $f'(a)=f'(b)=0$ невыполнимо.

3) Разделите интервал [a; b] пополам по $\frac{a+b}{2}$. И получаем два пробела: $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ и $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$.

Соответственно в каждом интервале рассмотрим вспомогательные функции $\varphi(x)=\frac{(x-a)^2}{2}$ и $\psi(x)=\frac{(x-b)^2}{2}$. Функции $\varphi(x)$ и $f(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы Коши в $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$, а функции $f(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют в $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$. То есть существует такая точка $\xi_1\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$, что равенство

$$\frac{f'(\xi_1)}{\varphi'(\xi_1)}=\frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)}{\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right)-\varphi(a)}=\frac{8\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)\right]}{(b-a)^2}.$$

А еще есть $\xi_2\in\left(\frac{a+b}{2},b\right)$, то

$$\frac{f'(\xi_2)}{\psi'(\xi_2)}=\frac{f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\psi(b)-\psi\left(\frac{a+b}{2}\right)}=\frac{8\left[f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]}{(b-a)^2}$$

Устанавливаем значения $\varphi'(\xi_1)$ и $\psi'(\xi_2)$, получаем

$$\begin{cases}\dfrac{f'(\xi_1)}{\varphi'(\xi_1)}=\dfrac{8\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)\right]}{(b-a)^2}\\[2ex]\dfrac{f'(\xi_2)}{\psi'(\xi_2)}=\dfrac{8\left[f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]}{(b-a)^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{f'(\xi_1)}{\xi_1-a}=\dfrac{8\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)-f(a)\right]}{(b-a)^2}\\[2ex]\dfrac{f'(\xi_2)}{\xi_2-b}=\dfrac{8\left[f(b)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]}{(b-a)^2}\end{cases}+\Rightarrow$$

$$\frac{f'(\xi_1)}{\xi_1-a}+\frac{f'(\xi_2)}{\xi_2-b}=\frac{8[f(b)-f(a)]}{(b-a)^2}$$

$$\frac{8[f(b)-f(a)]}{(b-a)^2}=\frac{f'(\xi_1)-f'(a)}{\xi_1-a}+\frac{f'(\xi_2)-f'(b)}{\xi_2-b}$$

Учитывая, что $a < \xi_1 < \dfrac{b+a}{2}$ $\left(\text{и } \dfrac{b+a}{2} < \xi_2 < b \right)$ в этих выражениях, мы видим, что функция $f'(x)$ удовлетворяет теореме Лагранжа в $[a, \xi_1]$ $(\text{и } [\xi_2; b])$. Тогда между a и ξ_1 существует точка c_1 ($a < c_1 < \xi_1$) такая, что выполняется равенство $f''(c_1) = \dfrac{f'(\xi_1) - f'(a)}{\xi_1 - a}$. А также между ξ_2 и b есть точка c_2 ($\xi_2 < c_2 < b$) такая, что выполняется равенство

$$f''(c_2) = \frac{f'(\xi_2) - f'(b)}{\xi_2 - b}$$

Если взять $f''(c) = \max\{f''(c_1),\ f''(c_2)\}$, то

$$\left| \frac{8[f(b) - f(a)]}{(b-a)^2} \right| = |f''(c_1) + f''(c_2)| \le |f''(c_1)| + |f''(c_2)| \le 2|f''(c)|$$

$$|f''(c)| \ge \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

Пример 3. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $f(x) \in C^{n-1}([x_0; x_n])$;

2) $f(x)$ имеют производную n-го порядка по $(x_0; x_n)$.

3) равенство $f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n)$ выполняется при $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n$.

Затем докажите, что между x_0 и x_n существует точка ε ($x_0 < c < x_n$) такая, что $f^{(n)}(\varepsilon) = 0$.

Решение: В $[x_k; x_{k+1}]$, $\forall k = \overline{0, n-1}$ функция $f(x)$ удовлетворяет теореме Ролла, поэтому есть такие $\exists \xi_k \in (x_k; x_{k+1})$ и $f'(\xi_k) = 0$. Это подтверждение актуально для каждого сегмента. Т.е $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = \ldots = f'(\xi_k) = 0$. Теперь для каждого $[\xi_0; \xi_1], [\xi_1; \xi_2], \ldots, [\xi_i; \xi_{i+1}] \ldots$ $i = \overline{0, k-1}$ функция $f'(x)$ удовлетворяет условию теоремы Ролла. Потом $\exists \eta_i \in (\xi_i; \xi_{i+1})$ и $f''(\eta_i) = 0$. Используя математическую индукцию, легко увидеть, что функция $f^{(n-1)}(x)$ удовлетворяет теореме Ролла на отрезке $[\varsigma_1; \varsigma_2]$ за шагом $n-2$. Потом $f^{(n-1)}(\varsigma_1) = f^{(n-1)}(\varsigma_2) = 0$. Следовательно, $\exists\ \varepsilon \in (\varsigma_1; \varsigma_2)$ и $f^{(n)}(\varepsilon) = 0$.

Список литературы

1. *Mamatov T.* Weighted Zygmund estimates for mixed fractional integration // Case Studies Journal, 2018. 7(5):82-88.
2. *Фихтенгоц Г.М.* Основы математического анализа (рус.). Том 1. Издательство "Наука". Москва, 1968. 441.
3. *Маматов Т., Сабирова Р.* Оценки типа Зигмунда для смешанных дробных производных Маршо// “Chronos” «Вопросы современной наука: проблемы, тенденции и перспективы». Выпуск 3 (30). М., 2020. С. 22-29.
4. *Mamatov T., Sabirova R., Hamraeva Z.* The Isomorphism Realized By Mixed Fractional Integrals In Hölder Classes// JCSCM. Vol. 10. Issue 2. June, 2020. P. 35-40.
5. *Mamatov T.* Mapping Properties of Mixed Fractional Differentiation Operators in Hölder Spaces Defined by Usual Hölder Condition // Journal of Computer Science & Computational Mathematics. Vol. 9. Issue 2, 2019. P. 103-106.
6. *Mamatov T., Raimov D., Elmurodov M.* Mixed Fractional Differentiation Operators in Hölder Spaces// (JMEST) ISSN: 2458-9403. Vol. 6. Issue 4, April, 2019.