ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ПО ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ РЕШЕНИЙ

Шумилина М.А.

Шумилина Маргарита Алексеевна – магистрант,
физико-математический факультет,
Воронежский государственный педагогический университет, г. Воронеж

Аннотация: *в статье рассмотрен алгоритм восстановления линейного однородного уравнения по фундаментальной системе решений как приложение определителя Вронского. На примерах показана реализация данного алгоритма, возможность его использования.*
Ключевые слова: *однородное линейное дифференциальное уравнение, фундаментальная система решений, определителем Вронского.*

Приложения определителя Вронского при изучении дифференциальных уравнений часто обходят стороной. Одним из таких приложений является восстановление линейного однородного уравнения по фундаментальной системе решений, о котором практически нигде не упоминается, поэтому в статье показаны применение данного приложения при решении задач.

Предположим, дана система функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ на отрезке (a, b) с определителем Вронского $W(x)$ не равным нулю. Необходимо составить линейное однородное уравнение, у которого фундаментальная система решений состоит из функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$.

Эта задача решается довольно легко. Так как общее решение этого уравнения должно иметь вид: $y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + \cdots + C_ny_n(x)$, система функций $y(x), y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ линейно зависима, поэтому её вронскиан (имеющий порядок $n + 1$) должен быть равен нулю:
$\begin{vmatrix} y(x) & y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y'(x) & y_1'(x) & \dots & y_1'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y^{(n)}(x) & y_1^{(n)}(x) & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix} = 0.$ Раскрывая этот определитель по первому столбцу, получим искомое уравнение. [2, с. 98]

Пример №1. Составить приведенное однородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка, имеющее фундаментальную систему решений: $y_1(x) = sin\,x\,, y_2(x) = tg\,x$. [1]

Решение. Составляем определитель третьего порядка:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y & y' & y'' \\ \sin x & \cos x & -\sin x \\ \operatorname{tg} x & \dfrac{1}{cos^2x} & \dfrac{2\sin x}{cos^2x} \end{vmatrix} = 0$$

и приравниваем его к нулю. Раскрывая определитель, получаем:

$$\left(\frac{\sin x}{cos^2x} - \sin x\right)y'' - \left(\frac{2sin^2x}{cos^2x} + \frac{sin^2x}{\cos x}\right)y' + \frac{3\sin x}{cos^2x}y = 0$$

$$\frac{sin^3x}{cos^2x}y'' - \frac{sin^2x(2 + cos^2x)}{cos^3x}y' + \frac{3\sin x}{cos^2x}y = 0$$

Значит, приведенное уравнение имеет вид:

$$y'' - \frac{2 + cos^2x}{\sin x \cos x}y' + \frac{3y}{\sin x} = 0$$

Его особыми точками являются точки, где $\sin x = 0$ или $\cos x = 0$, т.е точки $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Алгоритм составления линейного однородного уравнения по заданной фундаментальной системе решений, состоящей из функций $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ выглядит следующим образом:

1) найти производные данных функций до n-го порядка;
2) составить вронскиан имеющий порядок $n + 1$;
3) приравнять данный вронскиан к нулю;
4) раскрыть определитель Вронского, упростить выражение;
5) записать полученное уравнение.

Рассмотрим восстановление линейного однородного уравнения по фундаментальной системе решений, на конкретном примере №2, представленном в таблице 1.

Таблица 1. Пример № 2

Задание	Последовательность решения	Методика решения
Необходимо построить линейное однородное дифференциальное	$y_1' = -\frac{1}{x^2}, y_1'' = \frac{2}{x^3}, y_1''' = -\frac{6}{x^4};$ $y_2' = 1, y_2'' = 0, y_2''' = 0.$	Находим производные данных функций.

уравнение, по имеющееся в качестве фундаментальной системы решений функции $\frac{1}{x}, x, x\ln x$. [3]	$y_3' = \ln x + 1, y_3'' = \frac{1}{x}, y_3''' = -\frac{1}{x^2}$.	
	$W(x) = \begin{vmatrix} y & \frac{1}{x} & x & x\ln x \\ y' & -\frac{1}{x^2} & 1 & \ln x + 1 \\ y'' & \frac{2}{x^3} & 0 & \frac{1}{x} \\ y''' & -\frac{6}{x^4} & 0 & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = 0$	Составим вронскиан и приравняем к нулю, что соответствует искомому дифференциальному уравнению.
	$x\begin{vmatrix} y' & -\frac{1}{x^2} & \ln x + 1 \\ y'' & \frac{2}{x^3} & \frac{1}{x} \\ y''' & -\frac{6}{x^4} & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} y & \frac{1}{x} & x\ln x \\ y'' & \frac{2}{x^3} & \frac{1}{x} \\ y''' & -\frac{6}{x^4} & -\frac{1}{x^2} \end{vmatrix} = 0$	Раскроем определитель по третьему столбцу.
	$x\left(-\frac{2}{x^5}y' - \frac{6(\ln x + 1)}{x^4}y'' - \frac{y'''}{x^3} - \frac{2(\ln x + 1)}{x^3}y''' - \frac{y''}{x^4} + \frac{6}{x^5}y'\right) - \left(-\frac{2}{x^5}y - \frac{6\ln x}{x^3}y'' + \frac{y'''}{x^2} + \frac{2\ln x}{x^2}y''' - \frac{y''}{x^3} - \frac{6}{x^5}y\right) = 0$	Разложим оба определителя третьего порядка по правилу треугольников или правилу Саррюса.
	$-\frac{4}{x^5}y + \frac{4}{x^4}y' - \frac{8}{x^3}y'' - \frac{4}{x^2}y''' = 0$	Упростим выражение, раскрыв скобки.
	$x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y = 0$	Умножим на $-x^5$ и разделим на 4.

На примере показана работа составленного алгоритма и возможность его применения при решении задач. С помощью подробного, поэтапного разбора решения, рассмотрена возможность восстановление линейного однородного уравнения по фундаментальной системе решений. Данное приложение определителя Вронского может быть использовано при изучении дифференциальных уравнений. Выполнение данной задачи по алгоритму помогает обучающимся усвоить материал.

Список литературы

1. *Виленкин Н.Я. и др.* Дифференциальные уравнения: Учеб. пособие для студентов-заочников IV курса физ.-мат. фак. / Н.Я. Виленкин, М.А. Доброхотова, А.Н. Сафонов. М.: Просвещение, 1984. 176 с.
2. *Пушкарь Е.А.* Дифференциальные уравнения: Учебное пособие. М.: МГИУ, 2007. 254 с.
3. *Степанов В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: Гос. издательство технико-теоретической литературы, 1950. 473 с.