ВЫВОД СИСТЕМЫ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ДЛЯ МНОГОФАКТОРНОЙ РЕГРЕССИИ

Сергеева А.М.

Сергеева Анна Марксовна – кандидат физико-математических наук, доцент,
кафедра высшей математики,
Национальный исследовательский университет
«Московский энергетический институт», г. Москва

Аннотация: *регрессионный анализ – это мощный инструмент построения эконометрических моделей. В статье рассмотрен метод наименьших квадратов для случая линейной модели с несколькими факторами. Многофакторная линейная модель интересна еще и тем, что к ней приводятся некоторые нелинейные модели. Умение вывести систему нормальных уравнений для любого числа k факторов позволит исследователю чувствовать себя уверенно в построении математических регрессионных моделей, не занимаясь поиском формул в учебниках. Понимание каждой формулы системы нормальных уравнений является залогом успешного расчета параметров регрессионной модели с помощью различных компьютерных программ.*

Ключевые слова: *метод наименьших квадратов, многофакторная регрессия, система нормальных уравнений.*

УДК 519.24

Постановка задачи:

Регрессионной таблицей 1. данных, полученных из эксперимента (исследования) задана многофакторная модель [1]

Таблица 1. Исходные данные наблюдений

X_1	X_2	X_3	…	X_m	**Y**
X_{11}	X_{21}	X_{31}		X_{m1}	y_1
X_{12}	X_{22}	X_{32}		X_{m2}	y_2
X_{13}	X_{23}	X_{33}		X_{m3}	y_3
….	…	…	…	…	…
….	…	…	…	…	…
X_{1n}	X_{2n}	X_{3n}		X_{mn}	y_n

$$Y_c = B_0 + B_1X_1 + B_2X_2 + ... + ...B_mX_m \qquad (1)$$

$$y_1 = B_0 + B_1X_{11} + B_2X_{21} + B_3X_{31} + ...B_mX_{m1}$$

$$y_2 = B_0 + B_1X_{12} + B_2X_{22} + B_3X_{32} + ...B_mX_{m2} \qquad (2)$$

$$y_3 = B_0 + B_1X_{13} + B_2X_{23} + B_3X_{33} + ...B_mX_{m3}$$

и так далее.

То есть для каждого набора

$$(X_{1k}, X_{2k}, X_{3k}, ..., X_{mk}) \qquad (3)$$

Выполняется $$y_k = B_0 + B_1X_{1k} + B_2X_{2k} + B_3X_{3k} + ...B_mX_{mk} \qquad (4)$$

Рассмотрим функцию (m+1) переменной. Переменными величинами являются параметры $B_0, B_1, B_2.....B_m$

$$J_{B_0, B_1, ..., B_m} = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - Y_{ci})^2 \qquad (5)$$

$$J_{B_0, B_1, \ldots\ldots, B_m} = \sum_{i=1}^{n} (y_i - B_0 - B_1 x_{1i} - B_2 x_{2i} - B_3 x_{3i} \ldots - B_m x_{mi})^2$$

Вычислим частные производные по каждой переменной и приравняем к нулю.

$$\begin{cases} J'_{B_0} = 0, \\ J'_{B_1} = 0, \\ J'_{B_m} = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

i – второй индекс

$$\begin{cases} J'_{B_0} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - B_0 - B_1 x_{1i} - B_2 x_{2i} - B_3 x_{31} - B_m x_{mi})(-1) = 0, \\ J'_{B_1} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - B_0 - B_1 x_{1i} - B_2 x_{2i} - B_3 x_{3i} \ldots\ldots - B_m x_{mi})(-x_{1i}) = 0, \\ J'_{B_2} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - B_0 - B_1 x_{1i} - B_2 x_{2i} - B_3 x_{3i} - B_m x_{mi})(-x_{2i}) = 0, \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\ J'_{Bm} = \sum_{i=1}^{n} 2(y_i - B_0 - B_1 x_{1i} - B_2 x_{2i} - B_3 x_{3i} \ldots\ldots - B_m x_{mi})(-x_{mi}) = 0, \end{cases} \qquad (7)$$

Сократим на множители 2 и (-1), отрицательные слагаемые перенесем в правую часть.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} y_i = nB_0 + B_1 \sum x_{1i} + B_2 \sum x_{2i} + B_3 \sum x_{3i} + \ldots + B_m \sum x_{mi}, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_{1i} = B_0 \sum x_{1i} + B_1 \sum (x_{1i})^2 + B_2 \sum x_{2i} x_{1i} + B_3 \sum x_{3i} x_{1i} + \ldots + B_m \sum x_{mi} x_{1i}, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_{2i} = B_0 \sum x_{2i} + B_1 \sum x_{1i} x_{2i} + B_2 \sum (x_{2i})^2 + B_3 \sum x_{3i} x_{2i} + \ldots + B_m \sum x_{mi} x_{2i}, \\ \\ \sum_{i=1}^{n} y_i x_{mi} = B_0 \sum x_{mi} + B_1 \sum x_{1i} x_{mi} + B_2 \sum x_{2i} x_{mi} + B_3 \sum x_{3i} x_{mi} + \ldots + B_m \sum (x_{mi})^2, \end{cases} \qquad (8)$$

(m+1) уравнение в системе, (m+1) – неизвестный параметр. Решить систему можно средствами линейной алгебры, с помощью программ Excel или Mathcad.

Все суммы легко находятся из регрессионной таблицы, например,

$\sum_{i=1}^{n} x_{1i}$ - это сумма по 1 столбцу регрессионной таблицы.

$\sum_{i=1}^{n} x_{3i} x_{2i} = (\vec{x}_3, \vec{x}_2)$ скалярное произведение векторов.

Список литературы

1. Эконометрика. Елисеева И.И. Москва. Финансы и статистика, 2003.
2. Практикум по эконометрике. Елисеева И.И. Москва. Финансы и статистика, 2003.
3. Conclusion procedure of system of normal equations by the method of least squares for simple regression and multiple regression model. Москва. Спутник+, 2017.