КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ОДНОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Худойберганов М.У.[1], Неъматова Д.Э.[2]

[1]Худойберганов Мирзоали Уразалиевич - кандидат физико-математических наук, доцент,
кафедра математического моделирования и криптоанализа;
[2]Неъматова Дилфуза Эминовна – ассистент, преподаватель,
Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека,
г. Ташкент, Республика Узбекистан

Аннотация: *в этой статье мы рассмотрим математические аспекты численного решения одного класса квазилинейных гиперболических систем дифференциальных уравнений в частных производных. Благодаря особому выбору компонентов вектора зависимой переменной на гладких решениях система может быть переписана таким образом, что эти две эквивалентные формы записи исходной системы уравнений газодинамики позволяют получить для нее, так называемую локальную априорную оценку. Предлагается класс разностных схем для одномерных гиперболических систем уравнений. Рассматривается вопрос стабильности таких схем.*

Ключевые слова: *разностная схема, собственные значения, гиперболическая система, устойчивость, аппроксимация.*

УДК 519.633

Введение. Развитие вычислительной техники позволило исследовать с помощью численных методов ряд выдвигаемых практикой газодинамических задач. В общем случае решения нестационарных нелинейных уравнений газовой динамики не аналитичны. От этого в немалой степени зависит выбор конечно-разностной схемы расчета. Некоторые подходы к конструированию разностных схем изложены, например, в монографии [1]. В ней же описан один любопытный подход, основанный на возможности записи системы уравнений газовой динамики в двух вариантах. Поясним суть этого подхода сначала на исходном, дифференциальном, уровне. Как отмечается в [1] (см. также основополагающую работу [4]), система уравнений газовой динамики, описывающая трехмерное движение газа в предположении, что газ невязкий, не теплопроводящий и находится в состоянии локального термодинамического равновесия (т.е. существует уравнение состояния газа), может быть записана в виде симметрической t-гиперболической системы (по Фридрихсу).

Рассмотрим смешанную задачу для симметрической системы квазилинейных уравнений в области

$$AU_t + BU_x = 0 \qquad (1.1)$$

Здесь $A = A(U), B = B(U)$ - симметрические матрицы порядка N, причем A>0 (естественно, при физически оправданных требованиях на гладкое решение системы (1)); $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$ - вектор зависимых переменных. Далее, за счет специального подбора компонент вектора зависимых переменных U (см. [1, 4]) на гладких решениях система (1) может быть переписана и в таком, эквивалентном, виде:

$$\left(AU\right)_t + \left(BU\right)_x = 0 \qquad (1.2)$$

Эти две эквивалентные (на гладких решениях) формы записи исходной системы уравнений газовой динамики позволяют получить для нее так называемую *локальную априорную оценку*. В самом деле, предположим, что система (1.1) имеет гладкое решение $U = U(t,x),\ (t,x) \in R_+^2 = \left\{(t,x); t > 0, x \in R\right\}$, удовлетворяющее условию:

$$\left(U,U\right) \to 0 \text{ при } (x,x) \to \infty, \quad t \ge 0 \qquad (1.3)$$

и начальным данным t=0:

$$U(0,x) = U_0(x) \qquad (1.4)$$

Умножим системы (1.1), (1.2) скалярно на вектор U и сложим полученные выражения. В итоге будем иметь

$$(U, AU)_t + (U, BU)_x = 0 \qquad (1.5)$$

Проинтегрируем тождество (1.5) по R. С учетом условия (1.3) получим искомую *априорную оценку*

$$I(t) = I(0), \quad 0 < t < T < \infty, \qquad (1.6)$$

где

$$I(t)=\int_R (U,AU)dx.$$

При получении оценки (1.6) мы также полагали, что на данном гладком решении $U(t,x), \quad (t,x)\in R_+^2$ нормы матриц $B(U)$ ограничены.

Понятно, что оценка (1.6) имеет локальный характер, поскольку постоянная Т характеризует как время существования гладкого решения (время до наступления *градиентной катастрофы*) задачи (1.1), (1.4), так и время выполнения неравенства

$$A(U(t,x))>0, \quad (t,x)\in R_+^2$$

Тот факт, что система уравнений газовой динамики может быть записана в виде (1.1) или (1.2), наталкивает на мысль использовать это обстоятельство при конструировании конечно-разностных схем для уравнений газовой динамики с целью получения для приближенных решений конечно-разностного аналога локальной априорной оценки (1.6). По терминологии, принятой в [1], это будет означать *адекватность* исходной математической и вычислительной моделей. Дальнейшем мы опишем один класс таких разностных схем, при конструировании которого используется вышеупомянутое обстоятельство (другие примеры приведены в [1]; см. также работу [3]).

Как отмечается в [1], тождество (1.5) есть не что иное, как другая форма записи так называемого *дополнительного закона сохранения энтропии* (именно наличие такого закона и его не единственность позволяет представить систему уравнений газовой динамики в виде (1.1) или (1.2)).

Далее, мы отвлечемся от газодинамического происхождения систем (1.1), (1.2) и будем полагать, что исходная симметрическая t-гиперболическая система (1.1) может быть переписана в виде (1.2) на гладких решениях системы (1.1).

Разностная схема для системы (1.1)

Сформулируем для исходной математической модели (1.1), (1.4) следующую *вычислительную модель*. Построим в области R_+^2 разностную сетку с шагами $\Delta=\Delta t, h=\Delta x.$ Введем такие обозначения: $U_i^n=U(n\Delta, ih)$-сеточная вектор-функция, φ, ψ, ψ^{-1} - операторы сдвига: $\varphi U=U_i^{n+1}=\hat{U}$, $\psi^{\pm 1}U=U_{i\pm 1}^n, (\psi^{+1}=\psi)$; $\tau, \xi, \bar{\xi}$ - разностные операторы: $\tau=\varphi-1, \xi=\psi-1, \bar{\xi}=1-\psi^{-1}$.

Как известно, для симметрических матриц *B* можно осуществить следующее представление:

$$B=B_+-B_-, \qquad (2.1)$$

где $B_+,\ B_-\ge 0$ - симметрические матрицы.

В справедливости (2.1) легко убедиться, если в качестве $B_+,\ B_-$ взять следующие матрицы:

$$B_+=\frac{1}{2}R^*(\Lambda+|\Lambda|)R,$$

$$B_-=\frac{1}{2}R^*(-\Lambda+|\Lambda|)R,$$

Здесь *R* - ортогональная матрица, приводящая матрицу *B* к диагональному виду: $B=R^*\Lambda R$; $\Lambda=diag(\lambda_1,\ldots\lambda_N),\ \lambda_i$ - собственные значения матрицы *B*, $|\Lambda|=diag\left(|\lambda_1|,\ldots|\lambda_N|\right)$.

Для нахождения численного решения исходной математической модели (1.1), (1.4) предлагается следующая конечно-разностная схема:

$$\begin{aligned}&\hat{A}\tau U+\hat{D}^{-1}D\tau(AU)+\\&+r\left\{B_+(U^{(1)})\bar{\xi}\hat{U}+\hat{D}^{-1}\hat{D}_1\bar{\xi}(B_+(U^{(1)})\hat{U})-\right.\\&\left.-B_-(V^{(1)})\xi\hat{U}-\hat{D}^{-1}\hat{D}_{+1}\xi(B_-(V^{(1)})\hat{U})\right\}=0,\end{aligned} \qquad (2.2)$$

с начальными данными

$$U^0=U_0(ih). \qquad (2.3)$$

Здесь $A = A(U^n)$, $\hat{A} = A(\hat{U})$, $D^{-1} = diag\left(\frac{1}{u_1}, \frac{1}{u_2} \cdots, \frac{1}{u_N}\right)$, $r = \frac{\Delta}{h}$, $U^{(1)}, V^{(1)}$ -«промежуточные» значения вектора U .

Разностная схема (2.2) аппроксимирует не исходную систему (1.1), а ее следствие (которое вытекает из (1.1), (1.2)):

$$AU_t + \left(AU\right)_t + BU_x + \left(BU\right)_x = 0. \qquad (2.4)$$

Мы предполагаем далее, что решения конечно-разностной модели (2.2), (2.3) удовлетворяют условию

$$\left(U_i^n, U_i^n\right) \to 0 \qquad \text{при } i \to \infty,\ n = 0,1,... \qquad (2.5)$$

Мы предполагаем также, что нормы матриц $B_+\left(U^{(1)}\right), B_-\left(V^{(1)}\right)$ ограничены.

Предложенная разностная схема (2.2) является неявной и должна реализовываться, по-видимому, итерациями по нелинейности. Мы не конкретизируем выбор векторов $U^{(1)}, V^{(1)}$ поскольку возможны самые различные варианты такого выбора (такая много вариантность может оказаться весьма полезной для численного расчета прикладных задач).

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть на решениях конечно-разностной модели (2.2), (2.3) выполнено условие (2.5) и следующее неравенство:

$$A(U_i^n) > 0, \quad n = 0,1,\dots . \qquad (2.6)$$

Тогда разностная модель (2.2), (2.3) устойчива в энергетической норме $\sqrt{J_n}$, где $J_n = h\sum_{i=-\infty}^{\infty}\left(U_i^n, A\left(U_i^n\right)U_i^n\right).$

Доказательство:

Умножим систему (2.2) скалярно на вектор $\hat{U}$

$$\begin{gathered}\left(\hat{U}, \hat{A}\tau U\right) + \left(\hat{U}, \hat{D}^{-1}D\tau(AU)\right) + \\ +r\left\{\left(\hat{U}, B_+(U^{(1)})\bar{\xi}\hat{U}\right) + \left(\hat{U}, \hat{D}^{-1}\hat{D}_1\bar{\xi}(B_+(U^{(1)})\hat{U})\right) - \right. \\ \left. -\left(\hat{U}, B_-(V^{(1)})\xi\hat{U}\right) - \left(\hat{U}, \hat{D}^{-1}\hat{D}_{+1}\xi(B_-(V^{(1)})\hat{U})\right)\right\} = 0\end{gathered} \qquad (2.7)$$

Справедливы следующие, легкопроверяемые, соотношения:

1) $\left(\hat{U}, \hat{A}\tau U\right) + \left(\hat{U}, \hat{D}^{-1}\hat{A}\tau U\right) = \tau(U, AU),$

2) $\left(\hat{U}, B_+(U^{(1)})\bar{\xi}\hat{U}\right) + \left(\hat{U}, \hat{D}^{-1}\hat{D}_1\bar{\xi}(B_+(U^{(1)})\hat{U})\right) = \bar{\xi}(\hat{U}, B_+(U^{(1)})\hat{U}$

3) $\left(\hat{U}, B_-(V^{(1)})\xi\hat{U}\right) + \left(\hat{U}, \hat{D}^{-1}\hat{D}_{+1}\xi(B_-(V^{(1)})\hat{U})\right)\Big\} = \xi(\hat{U}, B_-(V^{(1)})\xi\hat{U}).$

С учетом этих соотношений равенство (2.7) примет такой вид:

$$\tau\left(U, AU\right) + r\left\{\hat{\xi}(\hat{U}, B_+(U^{(1)})\hat{U} - \xi(\hat{U}, B_-(V^{(1)})\hat{U})\right\} = 0. \qquad (2.7')$$

Умножим (2.7') на h и просуммируем полученное соотношение по i от $-\infty$ до ∞. С учетом (2.5) окончательно получим искомую оценку:

$$J_{n+1} = J_n, \quad n = 0,1,...,$$

т.е.

$$J_n = J_0, \quad n = 1,2,..., \qquad (2.8)$$

где агрегат J_n определен формулой (2.6). Равенство (2.8) и есть конечно-разностный аналог априорной оценки (1.6). Из (2.8) следует также устойчивость разностной модели (2.2), (2.3) в энергетической норме $\sqrt{J_n}$.

При получении (2.8) мы воспользовались следующей выкладкой:

$$\sum_{i=-\infty}^{\infty}\bar{\xi}(\hat{U},B_+(U^{(1)})\hat{U})=\lim_{M\to\infty}\sum_{i=-M+1}^{M}\bar{\xi}(\hat{U},B_+(U^{(1)})\hat{U})=$$
$$=\lim_{M\to\infty}\left\{(\hat{U},B_+(U^{(1)})\hat{U})\,|_{i=M}-(\hat{U},B_+(U^{(1)})\hat{U})\,|_{i=-M}\right\}=0$$

в силу (2.5) и т.д.

Выводы

В настоящей работе построена конечно-разностная схема для квазилинейных одномерных гиперболических систем. Доказана устойчивость таких схем в энергетической норме $\sqrt{J_n}$.(см. (2.6)). Проведены численные эксперименты на модельных задачах.

Список литературы

1. *Блохин А.М., Алаев Р.Д.* Интегралы энергии и их приложения к исследованию устойчивости разностных схем. Новосибирск: Изд-во НГУ, 1993.
2. *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. 608 с.
3. *Блохин А.М., Соковиков И.Г.* Об одном подходе к конструированию разностных схем для квазилинейных уравнений газовой динамики СМЖ, 1999. Т. 40. № 6. Стр. 1236-1243.
4. *Harten A.* On the symmetric form of systems of conservation laws with enthropy. J. Comput. Phys., 1983. V. 49. № 1. P. 151-164.