МИКРОЭКОНОМИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНЫХ НЕЦЕЛОГО ПОРЯДКА

Тарасова В.В.[1], Тарасов В.Е.[2]

[1]Тарасова Валентина Васильевна – магистрант,
Высшая школа бизнеса;
[2]Тарасов Василий Евгеньевич – доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник,
Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д.В. Скобельцына,
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
г. Москва

Аннотация: *в статье предлагается микроэкономическая интерпретация производных нецелого порядка. Для этого используется экономический индикатор, который обобщает понятия средней и предельной (маржинальной) величин за счет учета эффектов памяти. При этом средняя и предельная величины являются частными случаями предлагаемого индикатора, когда его порядок равен нулю и единице, соответственно. Используя предлагаемое обобщение понятия предельной величины, производные нецелого порядка интерпретируются как экономические характеристики (индикаторы), являющиеся промежуточными между средним и предельным индикаторами. Микроэкономическим смыслом производной нецелого порядка является предельная величина, описывающая экономический процесс со степенной угасающей памятью.*
Ключевые слова: *предельная величина, средняя величина, маржинальный анализ, производная нецелого порядка, интерпретация производной.*

Микроэкономика изучает поведение экономических агентов при принятии решений относительно потребления, производства и распределения ограниченных ресурсов. Одним из важнейших методов описания поведения экономических агентов в микроэкономике является предельный анализ, использующий математический аппарат производных целого порядка. Микроэкономическая интерпретация производных напрямую связана с предельным анализом и понятием предельной (маржинальной) величины.

В микроэкономике производная первого порядка описывает интенсивность изменения экономического показателя относительно исследуемого фактора, при условии неизменности других факторов [1]. Производная первого порядка от функции некоторого показателя по определяющему его фактору задает предельную (маржинальную) величину, соответствующую данному показателю. Предельная величина показывает прирост соответствующего показателя в расчете на единицу прироста определяющего его фактора. К базовым предельным величинам в микроэкономике относятся предельная производительность, предельная полезность, предельные затраты, предельная себестоимость, предельный доход, предельный спрос и некоторые другие.

В современной математике известны не только производные целых порядков, но и, так называемые, дробные производные [2, 3], порядок которых является нецелым числом. Производные дробных порядков активно используются в естественных науках [4, 5]. В экономике производные нецелого порядка могут применяться для описания экономических процессов с динамической памятью [6, 7]. Прежде чем перейти к рассмотрению микроэкономической интерпретации производных нецелого порядка, обсудим более детально некоторые аспекты экономической интерпретации производной первого порядка.

При изучении микроэкономических явлений и процессов обычно выполняется расчет, как предельных величин, так и средних величин для показателей, которые представляются в виде функций от определяющих факторов [1, с. 95-101]. Приведем стандартные определения средней и предельной величин. Пусть задана однозначная функция Y=Y(X), описывающая однозначную зависимость экономического показателя Y от некоторого фактора X. Средняя величина показателя Y определяется [1, с. 95-96] как отношение функции Y=Y(X) к соответствующему значению фактора X, то есть

$$\mathrm{AY_X} := \frac{\mathrm{Y(X)}}{\mathrm{X}}. \qquad (1)$$

Если функция Y=Y(X), описывающая зависимость экономического показателя Y от фактора X, является однозначной и дифференцируемой функцией, то предельная (маржинальная) величина показателя Y определяется [1, с. 96] как производная первого порядка функции Y=Y(X) по фактору X, то есть

$$\mathrm{MY_X} := \frac{\mathrm{dY(X)}}{\mathrm{dX}}. \qquad (2)$$

Важнейшим условием применимости формулы (2), задающей предельный индикатор, является предположение, что показатель Y может быть представлен в виде однозначной функции фактора X. В общем случае, это предположение не выполняется, и зависимость Y от X является неоднозначной, то есть одному значению X могут соответствовать несколько различных значений Y.

Приведем пример неоднозначной зависимости показателя Y от фактора X, используя результаты нашей статьи [8, с. 7]. Пусть показатель и фактор, как функции времени t, задаются уравнениями

$$X(t) = 0.001 \cdot t^2 - 0.2 \cdot t + 70, \qquad (3)$$

$$Y(t) = 0.01 \cdot t^2 - 3 \cdot t + 1400. \qquad (4)$$

Зависимость показателя (4) от фактора (3) представлена в виде Рис. 1.

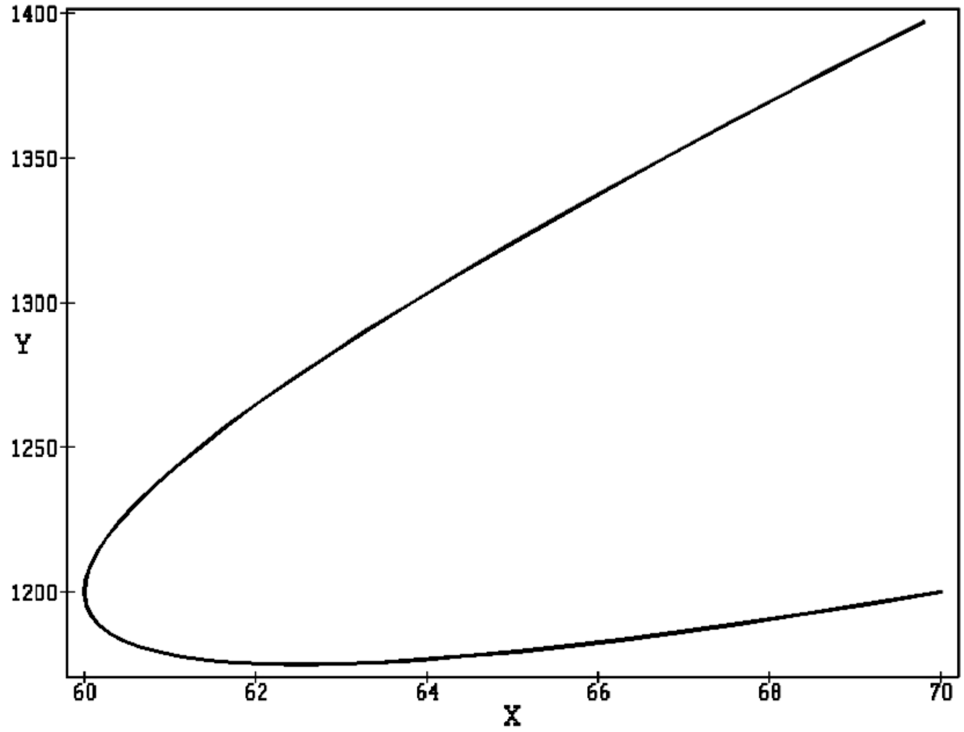

Рис. 1. Зависимость Y от X, задаваемая формулами (3) и (4) для t$\in [0,200]$

Приведем второй пример неоднозначной зависимости показателя Y от фактора X, используя результаты статьи [8, с. 8]. Пусть показатель и фактор, как функции времени t, задаются уравнениями

$$X(t) = 8.2 \cdot 10^{-9} \cdot t^4 - 1.5 \cdot 10^{-5} \cdot t^3 + 5.4 \cdot 10^{-3} \cdot t^2 - 0.58 \cdot t + 70, \qquad (5)$$

$$Y(t) = 7.5 \cdot 10^{-6} \cdot t^4 - 3.5 \cdot 10^{-3} \cdot t^3 + 0.51 \cdot t^2 - 24 \cdot t + 1700. \qquad (6)$$

Зависимость показателя (6) от фактора (5) представлена в виде Рис. 2.

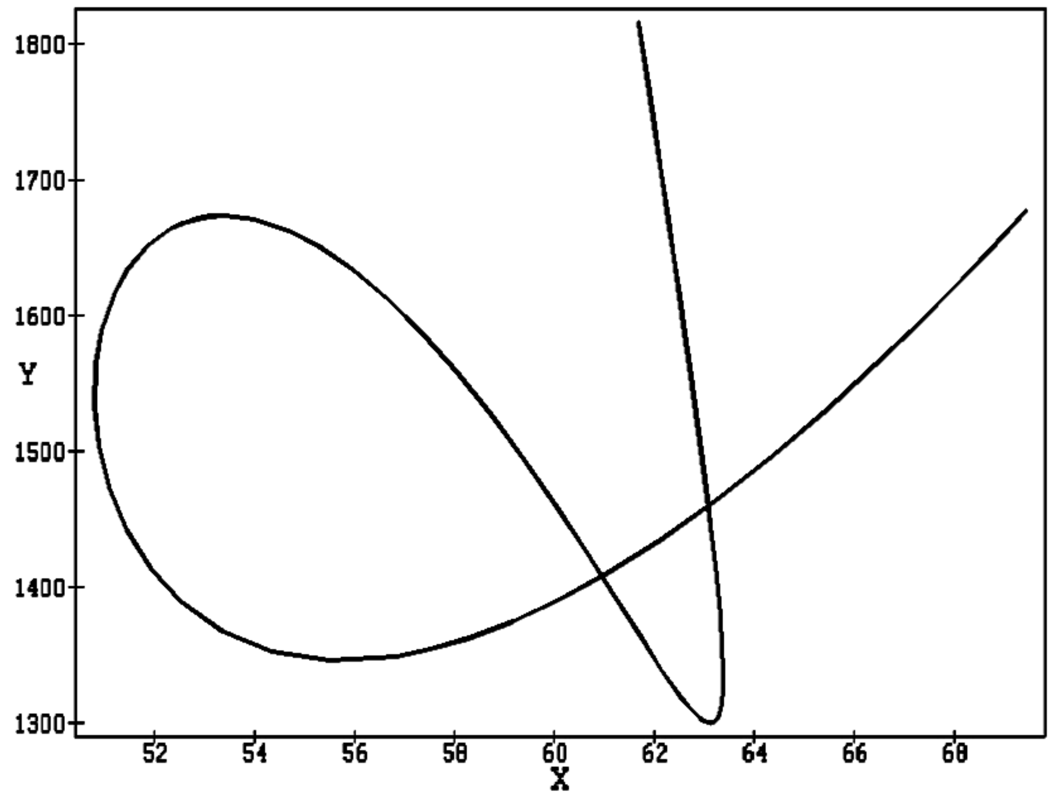

Рис. 2. Зависимость Y от X, задаваемая формулами (5) и (6) для $t \in [0,240]$

Из графиков, представленных на Рис. 1 и Рис. 2, видно, что, во многих случаях, одному значению X могут соответствовать более одного значения Y, то есть зависимость Y от X является неоднозначной.

Если зависимость показателя от фактора является неоднозначной, то мы не можем использовать формулы (1) и (2) для вычисления средних и предельных величин. Однако данную проблему можно устранить. Для этого достаточно воспользоваться тем фактом, что показатель и фактор практически всегда могут рассматриваться как однозначные функции времени. Поэтому при определении экономических индикаторов следует использовать параметрическую зависимость показателя Y от фактора X в виде однозначных функций Y=Y(t) и X=X(t).

В дифференциальном исчислении переменная Y как функция аргумента X называется заданной параметрически, если обе эти переменные заданы как функции некоторого параметра t [9, с. 238]. В нашем случае, в качестве параметра выступает время. Будем предполагать, что Y=Y(t) и X=X(t) являются непрерывно дифференцируемыми функциями в окрестности t=T. В результате средние и предельные величины показателя в момент времени t=T можно определить формулами

$$AY_X(T) := \frac{Y(T)}{X(T)}, \qquad (7)$$

$$MY_X(T) := \left(\frac{\frac{dY(t)}{dt}}{\frac{dX(t)}{dt}}\right)_{t=T} = \frac{dY(T)/dT}{dX(T)/dT} = \left(\frac{1}{X^{(1)}(T)} \cdot \frac{d}{dT}\right) Y(T), \qquad (8)$$

где предполагается $X(T) \neq 0$ и $X^{(1)}(T) := dX(T)/dT \neq 0$. Формула (8) фактически означает, что предельная величина является параметрической производной. В общем виде параметрическая производная целого порядка n>0 определяется формулой

$$D^n_{X(t)} Y(t) = \left(\frac{1}{X^{(1)}(t)} \cdot \frac{d}{dt}\right)^n Y(t). \qquad (9)$$

где предполагается, что $X^{(1)}(T) := dX(T)/dT \neq 0$. В результате $MY_X(T) = D^1_{X(t)} Y(t)$. Производная (9) также может быть названа производной функции Y(t) по функции X(t) целого порядка n>0.

Если зависимость Y(t) от X(t) можно представить в виде однозначной дифференцируемой функции Y=Y(X), исключив временной параметр t, то тогда формулы (2) и (8) будут эквивалентны в силу правила дифференцирования сложной функции. В этом случае, формулы (1) и (7) тоже будут эквивалентны. Для эквивалентности формул достаточно, чтобы функция X=X(t) в окрестности рассматриваемой точки t=T была обратимой. Для существования у функции X=X(t) в окрестности точки t=T обратной функции достаточно, чтобы производная $X^{(1)}(t)$ была непрерывна и отлична от нуля в точке t=T [9, с. 238]. Если функция $X = X(t)$ имеет отличную от нуля и сохраняющую знак производную $X^{(1)}(t)$ в некоторой окрестности точки t=T, то для этой функции в окрестности точки t=T существует обратная функция, определенная и дифференцируемая в некоторой окрестности точки $X_0 = X(T)$ [9, с. 672].

Подчеркнем, что формулы (8) и (9) являются стандартными определениями параметрических производных. Более того, формула (8) может рассматриваться как обобщение первой производной показателя Y=Y(t) по фактору X=X(t) для параметрической зависимости Y от X. В результате формулы (7) и (8) могут применяться для параметрических зависимостей, заданных уравнениями (3), (4) и/или (5), (6). При этом формулы (1) и (2) для зависимостей (3), (4) и (5), (6) неприменимы.

Используя формулу (8), можно утверждать, что $MY_X(T)$ характеризует скорость изменения показателя Y=Y(t) при единичной скорости изменения фактора X(t). В результате экономический смысл производной первого порядка по времени заключается в том, что она описывает скорость изменения экономического показателя с течением времени при единичной скорости изменения исследуемого фактора, при условии постоянства других факторов.

В результате можно утверждать, что экономическая интерпретация производной первого порядка для зависимости Y от X, связана с предельным индикатором (8). Формула (8) позволяет нам интерпретировать первую производную как скорость изменения показателя Y в расчете на единицу скорости изменения определяющего его фактора X в выбранный момент времени t=T. При этом данная интерпретация применима и для случая, когда для параметрической зависимости Y(t) от X(t) не существует однозначной функции Y=Y(X).

Следует отметить, что одним из причин, порождающих неоднозначность функции показателя, является наличие памяти у экономических агентов [6, 7]. Субъекты экономических отношений могут помнить предыдущие заметные изменения показателя Y(t) и фактора X(t), и при повторных аналогичных изменениях реагировать на эти изменения уже по-другому, чем это делали ранее. Как следствие, показатель будет другим, не смотря на то, что фактор принимает те же значения. Это приводит к тому, что одному и тому же значению фактора соответствует несколько различных значений показателя. Математически это описывается как неоднозначность функции Y=Y(X). Наличие памяти у экономических субъектов приводит к тому, что предельный индикатор в момент времени t=T может зависеть от всех изменений Y(t) и X(t) на некотором конечном интервале времени (0,T), предшествующем рассматриваемому моменту t=T. Средняя и предельная величины показателя, определяемые формулами (7) и (8), зависят только от заданного момента времени t=T и его бесконечно малой окрестности t=T. Поэтому можно сказать, что стандартные определения экономических индикаторов (7) и (8) применимы только при условии, что все экономические субъекты страдают полной амнезией. Очевидно, что данное приближение не всегда можно использовать в экономическом анализе. Математически это приближение обусловлено использованием производных целого порядка.

В современной математике известно понятие производной (интегро-дифференцирования) нецелого порядка [2, 3]. Производные нецелого порядка могут применяться для описанию экономических процессов с памятью [6, 7]. Известны различные типы производных нецелого порядка. В данной статье мы будем рассматривать производную Капуто. Одной из отличительных особенностей этой производной является то, что её действие на постоянную функцию дает ноль. Применение производной Капуто в экономическом анализе позволяет получать нулевые значения предельного индикатора нецелого порядка для постоянной функции. Известны левосторонние и правосторонние производные Капуто. Мы будем рассматривать только левосторонние производные, поскольку экономический процесс в момент времени T зависит только от изменений состояния этого процесса в прошлом, то есть для t<T, а правосторонняя производная Капуто определяется интегрированием по значениям функции при t>T. Пусть функция f(t) имеет производные вплоть до (n-1) порядка, которые являются абсолютно непрерывными функциями на интервале [0,T]. Тогда левосторонняя производная Капуто порядка $\alpha \geq 0$ определяется [3, с. 90-99] формулой

$$ {}_0^C D_T^{\alpha} f(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^T \frac{f^{(n)}(t)dt}{(T-t)^{\alpha-n+1}}, \qquad (10)$$

где $\Gamma(\alpha)$ – гамма функция, и T>0, n:=[α]+1, а $f^{(n)}(t)$ – производная целого порядка n от функции f(t) по времени t. Для целых значений α=n, производная Капуто совпадает [3, с. 92-93], [10, с. 79] со стандартной производной порядка n, то есть

$$ {}_0^C D_T^{n} f(t) = \left(\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right)_{t=T}, \ {}_0^C D_T^{0} f(t) = f(T). \qquad (11)$$

Параметрическая дробная производная Риманна-Лиувилля описывается в разделе 18.2 книги [2, с. 248-250] и разделе 2.5 в [3, с. 99-105]. Параметрическая производная Капуто была предложена в формуле 23 из Определения 3 в работе [11, с. 224]. Свойства этой производной были описаны в статье [12]. Левосторонняя параметрическая производная Капуто порядка α>0 определяется уравнением

$$\left({}_0^C D_{T;X}^{\alpha} Y\right)(t) := \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t d\tau \, \frac{X^{(1)}(\tau)}{(X(t)-X(\tau))^{\alpha+1-n}} \cdot \left(\frac{1}{X^{(1)}(\tau)} \cdot \frac{d}{d\tau}\right)^n Y(\tau)\,, \qquad (12)$$

где a<t<b, $n-1 \leq \alpha \leq n$, функция $X(\tau)$ имеет непрерывные производные и $X^{(1)}(\tau) = dX(\tau)/d\tau \neq 0$. Производная (12) также называется дробной производной Капуто функции Y(t) по функции X(t) порядка

α>0. Для целых значений α=n>0, параметрическая производная Капуто (12) совпадает со стандартной параметрической производной (9), то есть $\left({}_0^C D_{T;X}^{\alpha} Y\right)(t) = D_{X(t)}^{n} Y(t)$. Если X(τ)=τ, то параметрическая производная (12) совпадет с производной Капуто (10), то есть

$$\left({}_0^C D_{T;\tau}^{\alpha} Y\right)(t) = {}_0^C D_T^{\alpha} f(t). \qquad (13)$$

Отметим, что производные (10) и (12) не эквивалентны даже при существовании однозначной функции Y=Y(X) в силу усложнения правила дифференцирования сложной функции для дробных производных [10, с. 97-98], [13, с. 59].

Используя левосторонние производные Капуто (10) и (12), можно определить обобщение понятий предельных и средних величин, которое позволит учитывать эффекты памяти в экономических процессах [6, 7]. Впервые предельные (маржинальные) величины нецелого порядка для экономических процессов с памятью были предложены в работах [14, 15, 16]. Пусть экономический показатель Y=Y(t) и определяющий его фактор X=X(t) являются функциями времени $t \in [0;T]$, которые имеет производные вплоть до (n-1)-го порядка, являющиеся абсолютно непрерывными функциями на интервале [0,T]. Тогда предельная (маржинальная) величина, характеризующего экономический процесс со степенной памятью в момент времени t=T, может быть определено [14, 15, 16] в виде уравнения

$$MY_X(\alpha, T) := \frac{{}_0^C D_T^{\alpha}\, Y(t)}{{}_0^C D_T^{\alpha} X(t)}, \qquad (14)$$

где ${}_0^C D_T^{\alpha} X(t) \neq 0$, и ${}_0^C D_T^{\alpha}$ – левосторонняя производная Капуто порядка $\alpha \geq 0$, которая определяется выражением (10). Параметр α характеризует степень угасания памяти об изменениях показателя и фактора на интервале [0,T].

Предельная (маржинальная) величина, характеризующая экономический процесс со степенной памятью в момент времени t=T, может определяться через параметрическую производную (12) формулой

$$MY_X(\alpha, T) := \left({}_0^C D_{T;X}^{\alpha} Y\right)(t)\,, \qquad (15)$$

где $X^{(1)}(\tau)$, и ${}_0^C D_{T;X}^{\alpha}$ – левосторонняя параметрическая производная Капуто порядка $\alpha \geq 0$, определяемая выражением (12).

Стандартная предельная величина (8) экономического показателя учитывает изменения показателя и фактора только в бесконечно малой окрестности момента времени T. Предлагаемые экономические индикаторы (14) и (15) позволяют описывать зависимость экономических процессов от изменений состояний процесса на конечном интервале времени [0,T]. В индикаторах с памятью (14) и (15), рассматриваемом в момент времени T, учитывается зависимость не только от показателя Y(t) и фактора X(t) в этот момент времени (t=T), но и от их изменений Y(t) и X(t) на конечном интервале времени [0,T].

Рассмотрим частные случаи предельных величин (14) и (15).

Для значения параметра угасания памяти α=1, параметрическая маржинальная величина (15) совпадает со стандартной параметрической предельной величиной (8), то есть

$$MY_X(1, T) = MY_X(T) = \left(\frac{1}{X^{(1)}(T)} \cdot \frac{d}{dT}\right) Y(T). \qquad (16)$$

Индикатор (15) обобщает понятия предельной величины (8), включив это понятие как частный случай.

Используя ${}_0^C D_T^{0} f(t) = f(T)$, получаем, что индикатор (14) задает стандартную среднюю величину (7) в виде

$$MY_X(0, T) = \frac{{}_0^C D_T^{0}\, Y(t)}{{}_0^C D_T^{0} X(t)} = \frac{Y(T)}{X(T)} = AY_X(T). \qquad (17)$$

Используя ${}_0^C D_T^{1} f(t) = df(T)/dT$, получаем индикатор (14) задает стандартную предельную величину (8) в виде

$$MY_X(1, T) = \frac{{}_0^C D_T^{1}\, Y(t)}{{}_0^C D_T^{1} X(t)} = \frac{dY(T)/dT}{dX(T)/dT} = MY_X(T). \qquad (18)$$

Из полученных равенств (17) и (18) видно, что средняя величина (7) и предельная величина (8) являются частными случаями предлагаемого индикатора (14) порядка $\alpha \geq 0$. Индикатор (14) обобщает понятия средней и предельной величин, включив эти понятия как частные случаи. Кроме этого, маржинальная величина (14) позволяет рассматривать не только средние и предельные характеристики экономических явлений и процессов, но и такие характеристики, которые являются промежуточными между средней и предельной. Предлагаемый индикатор включает в себя весь спектр промежуточных характеристик (индикаторов) экономического процесса от средней величины до предельной.

Отметим, что формула (14) может применяться для зависимостей Y от X, заданных уравнениями (3), (4) и/или (5), (6). Для этого достаточно применить формулы, позволяющие вычислять производные Капуто порядка $\alpha \geq 0$ для степенной функции [3, с. 95], имеющие вид

$$D_{a+}^{\alpha} t^{\beta} = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}\, t^{\beta-\alpha}, \qquad (19)$$

$$D_{a+}^{\alpha} t^{k} = 0, \qquad (20)$$

где $n-1<\alpha<n, \beta>n-1$, и $k=0,1,\dots,n-1$. В частности, имеем $D^{\alpha}_{a+}1=0$ и $D^{\alpha}_{a+}t^{\alpha}=\Gamma(\alpha+1)$.

Формула (15) также может применяться для неоднозначных зависимостей таких, как (3)-(6). Однако вычисление индикаторов (15) для этих неоднозначных зависимостей значительно сложнее, чем вычисления индикаторов (14). Вычисление предельной величины (15) для однозначных функций Y=Y(X) может быть реализовано, используя, например, формулы [12, с. 464], имеющие вид

$$D^{\alpha,x}_{a+}(X(t)-X(0))^{\beta}=\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}\,(X(t)-X(0))^{\beta-\alpha}, \qquad (21)$$

где $\alpha>0$ и $\beta>-1$.

В результате можно сделать вывод, что экономическая интерпретация производной нецелого порядка $\alpha\geq 0$ напрямую связана с предложенной концепцией предельных (маржинальных) величин с динамической памятью, определенных формулами (14) и (15). Производная нецелого порядка $\alpha>0$ можно интерпретировать как предельную (маржинальную) величин экономического показателя Y в экономическом процессе с памятью. При этом данная интерпретация применима не только для производных Капуто, но и для всех видов производных нецелого порядка, позволяющих описывать динамическую память в экономике [6, 7].

Отметим, что производные нецелого порядка имеют различную интерпретацию в микроэкономике и макроэкономике. Макроэкономическая интерпретация производных и интегралов нецелого порядка связана с обобщениями понятий акселератора и мультипликатора, предложенными в [17, 18, 19] для описания макроэкономических процессов со степенной памятью [20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28].

Список литературы

1. *Грачева М.В., Черемных Ю.Н., Туманова Е.А.* Моделирование экономических процессов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2013. 543 с.
2. *Самко С.Г., Килбас А.А., Марычев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые приложения. Минск: Наука и Техника, 1987. 688 с.
3. *Kilbas A.A., Srivastava H. M., Trujillo J.J.* Theory and Applications of Fractional Differential. Equations. Amsterdam: Elsevier, 2006. 540 с.
4. *Учайкин В.В.* Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008. 512 с.
5. *Тарасов В.Е.* Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. Москва: ИИКИ, 2011. 568 с.
6. *Tarasova V.V., Tarasov V.E.* Concept of dynamic memory in economics // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2018. Vol. 55. P. 127-145. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.06.032.
7. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Понятие динамической памяти в экономической теории // Экономика и предпринимательство, 2017. № 6 (83). С. 868-880.
8. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* О применимости точечной эластичности спроса по цене для биржевых торгов по доллару США // Научная перспектива, 2016. № 6. С. 6-11.
9. *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х.* Математический анализ. М.: Наука, 1979. 720 с.
10. *Podlubny I.* Fractional Differential Equations. San Diego: Academic Press, 1998. 340 p.
11. *Tarasova V.V., Tarasov V.E.* Elasticity for economic processes with memory: fractional differential calculus approach // Fractional Differential Calculus, 2016. Vol. 6. № 2. P. 219-232. DOI: 10.7153/fdc-06-14.
12. *Almeida R.* A Caputo fractional derivative of a function with respect to another function // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2017. Vol. 44. P. 460–481. DOI: 10.1016/j.cnsns.2016.09.006.
13. *Diethelm K.* The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type. Berlin: Springer-Verlag, 2010. 247 p.
14. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Предельная полезность для экономических процессов с памятью // Альманах современной науки и образования, 2016. № 7 (109). С. 108-113.
15. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Экономический показатель, обобщающий среднюю и предельную величины // Экономика и предпринимательство, 2016. № 11-1 (76-1). С. 817-823.
16. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Предельные величины нецелого порядка в экономическом анализе // Азимут Научных Исследований: Экономика и Управление, 2016. № 3 (16). С. 197-201.
17. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Обобщение понятий акселератора и мультипликатора для учета эффектов памяти в макроэкономике // Экономика и предпринимательство, 2016. № 10-3 (75-3). С. 1121-1129.
18. *Tarasova V.V., Tarasov V.E.* Economic accelerator with memory: discrete time approach // Проблемы современной науки и образования, 2016. No. 36 (78). P. 37-42. DOI: 10.20861/2304-2338-2016-78-002
19. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Точная дискретизация экономических акселераторов и мультипликаторов с памятью // Экономика и предпринимательство, 2017. № 7 (84). С. 1063-1069.
20. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Влияние эффектов памяти на мировую экономику и бизнес // Азимут Научных Исследований: Экономика и Управление, 2016. Том 5. № 4 (17). С. 369-372.

21. *Tarasova V.V., Tarasov V.E.* Fractional dynamics of natural growth and memory effect in economics // European Research, 2016. № 12 (23). P. 30-37. DOI: 10.20861/2410-2873-2016-23-004.
22. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Эредитарное обобщение модели Харрода-Домара и эффекты памяти // Экономика и предпринимательство, 2016. № 10-2 (75-2). С. 72-78.
23. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Эффекты памяти в эредитарной модели Харрода-Домара // Проблемы современной науки и образования, 2016. № 32 (74). С. 38-44. DOI: 10.20861/2304-2338-2016-74-002.
24. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Кейнсианская модель экономического роста с памятью // Экономика и управление: проблемы, решения, 2016. № 10-2 (58). С. 21-29.
25. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Эффекты памяти в эредитарной модели Кейнса // Проблемы современной науки и образования, 2016. № 38 (80). С. 56-61. DOI: 10.20861/2304-2338-2016-80-001.
26. *Tarasova V.V., Tarasov V.E.* Economic growth model with constant pace and dynamic memory // Проблемы современной науки и образования, 2017. № 2 (84). P. 40-45. DOI: 10.20861/2304-2338-2017-84-001.
27. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Динамические межотраслевые модели с памятью, обобщающие модель Леонтьева // Экономика и предпринимательство, 2017. № 2-1 (79-1). С. 913-924.
28. *Тарасова В.В., Тарасов В.Е.* Dynamic intersectoral models with power-law memory // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2018. Vol. 54. P. 100-117. DOI: 10.1016/j.cnsns.2017.05.015.