К ВОПРОСУ ПОСТРОЕНИЯ ТАБЛИЦ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ БЕЗ ПРИМЕНЕНИЯ ЧИСЛА π

Драпезо В.Д.

Драпезо Владимир Данилович – инженер-механик, инженер-конструктор,
Специализированный строительно-монтажный поезд № 1 ОАО «Трест Белтрансстрой»,
г. Минск, Республика Беларусь

Аннотация: *в статье представлено решение задачи, которую не удалось решить математикам древнего мира на протяжении 16-ти веков: найти значение синуса шагового угла с любым числом верных знаков (без нахождения числа π- отношение длины окружности к её диаметру), необходимого для построения таблиц тригонометрических функций. По известным значениям синуса и косинуса 15° и 18° (выраженных в радикалах) находится значение с выбранным числом верных знаков синуса 3°, а затем 1°, 1', 1'', используя формулы тригонометрии и метод последовательных приближений.*
Ключевые слова: *синус угла, шаговый угол, число π.*

Математики древних времен делали попытки составления таблиц синусов без вычисления числа π (в Индии), но ниже шага $3^0 45^1$ не опускались.

Наибольших успехов в построении таблиц синусов и косинусов достиг математик Ретикус (1514 – 1576 г.) со своими помощниками и построил таблицы с 15-ю верными цифрами, углы шли через 10^{11}, радиус окружности делился на 10^{15} частей. Искали сначала число π с достаточной точностью, находили радианную меру малого угла, принимали за синус угла величину самого угла и тогда строили таблицы. Но это настолько трудоемко, что, например, упомянутый Ретикус со своими помощниками работал над таблицами в течении 30 лет, таблицы были изданы только в 1596 году его учеником Ото [1, с. 328-330].

Настоящая статья предлагает способ построения таблиц синусов и косинусов элементарной математикой без определения числа π.

Поводом для рассмотрения этого способа явилась кем-то составленная задача: доказать справедливость тождества

$$cos36^0 - sin18^0 = 0.5$$

В результате решения ее найдено значение $\sin 18^0$в радикалах (см. приложение 1)

$$sin18^0 = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$$

Это дало возможность определить $\sin 3^0$:

$$sin3^0 = \sin(18^0 - 15^0) = sin18^0 cos15^0 - cos18^0 sin15^0 = 0.05233\ 59562\ 42943\ 83272\ 21186\ 29609\ 078,$$

т.к входящие составляющие в приведенной формуле определены в радикалах (позволяющие вычислять их с любым числом верных цифр):

$$\sin 15^0 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}; cos15^0 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}; cos18^0 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}.$$

Для нахождения $\sin 1^0$ рассмотрим формулу синуса тройного угла:

$$sin3\alpha = 3sin\alpha - 4sin^3\alpha,$$

которая представляет собой кубическое уравнение, и по формулам Кардана имеет решение в радикалах, но числовой результат в конечном счете приводит к определению значения тригонометрической функции.

Преобразуем формулу синуса тройного угла следующим образом:

$$sin3\alpha = sin\alpha(3 - 4sin^2\alpha)$$

$$sin\alpha = \frac{sin3\alpha}{3 - 4sin^2\alpha} \qquad (1)$$

Обозначим sinα = x:

$$x_{n+1} = \frac{sin3\alpha}{3 - 4x_n^2}$$

Таким образом, получили формулу для вычисления синуса угла по известному значению синуса тройного угла методом последовательного приближения к более точному его значению путем подстановки сначала приближенного значения (x_0), а потом очередного вычисленного (x_{n+1}).

Для вычисления $\sin 1^0$примем начальное приближенное значение:

$$x_0 = sin1^0 \approx {}^{sin3^0}/_3 \cong {}^{0.0523}/_3 \cong 0.0174\,,$$

Вычисления проводим по рабочей формуле:

$$x_{n+1} = \frac{sin3^0}{3 - 4x_n^2}$$

Результаты последовательных вычислений приведены ниже:

X_1 = 0.01745 23639 17914 32789 65915 05928 806
X_2 = 0.01745 24064 02733 98936 97949 91045 545
X_3 = 0.01745 24064 37255 43923 67499 34860 47
X_4 = 0.01745 24064 37283 49000 79308 31494 062
X_5 = 0.01745 24064 37283 51280 08832 61233 037
X_6 = 0.01745 24064 37283 51281 94039 17122 119
X_7 = 0.01745 24064 37283 51281 94189 66278 02
X_8 = 0.01745 24064 37283 51281 94189 78506 372
X_9 = 0.01745 24064 37283 51281 94189 78516 308
X_{10} = 0.01745 24064 37283 51281 94189 78516 316
X_{11} = 0.01745 24064 37283 51281 94189 78516 316

При $X_{11} = X_{10}$ расчет закончен.

$sin1^0 =$ 0.01745 24064 37283 51281 94189 78516 316;

$\cos 1^0 = \sqrt{1 - sin^2 1^0}$ = 0.99984 76951 56391 23915 70115 58813 91.

Далее ставим задачу найти значение sin1' и sin1''.

$$sin30' = \sqrt{(1 - cos1^0)/2} = 0.0087265354\ 98373\ 93496\ 88821\ 39735\ 844.$$

Используя формулу (1), определим sin10' по рабочей формуле:

$$x_{n+1} = \frac{sin30'}{3 - 4x_n^2}$$

Приняв первоначальное приближенное значение $x_0 \cong sin10' \cong sin30'/3 = 0.00872/3 = 0.0029$.

Результаты расчета последовательных приближений приведены ниже:

X_1 = 0.0029 08877 78434 08667 30548 34320 66166
X_2 = 0.0029 08877 98435 74210 60270 73338 33755
X_3 = 0.0029 08877 98436 19343 22504 52483 11924
X_4 = 0.0029 08877 98436 19344 24343 77888 48792
X_5 = 0.0029 08877 9843619344 24346 07683 10495
X_6 = 0.0029 08877 98436 19344 24346 07688 29014
X_7 = 0.0029 08877 98436 19344 24346 07688 29025
X_8 = 0.0029 08877 98436 19344 24346 07688 29025

При $X_8 = X_7$расчет закончен.

$sin10'$ = 0.00290 88779 84361 93442 43460 76882 9025

$cos10'$ = 0.99999 57692 05486 23611 59460 12436 12

$sin5' = \sqrt{\dfrac{1 - cos10'}{2}}$ = 0.00145 44405 30541 535507 62744 90817 1115

Определим формулу вычисления синуса угла по известной величине синуса пятерного (в 5 раз большего) угла по типу формулы (1) (вывод формулы см. приложение 2):

$$\sin\alpha = \frac{sin5\alpha}{5 - 20sin^2\alpha + 16sin^4\alpha} \qquad (2)$$

Обозначим sinα = x, тогда рабочая формула для вычисления значения $\sin 1^1$,будет выглядеть следующим образом:

$$x_{n+1} = \frac{sin5'}{5 - 20x_n^2 + 16x_n^4}$$

Примем первоначальные значения $x_0 \cong sin1' \cong sin5'/5 = 0.00145/5 = 0.00029$

Результаты расчета последовательных приближений приведены ниже:

X_1 = 0.00029 08882 03963 09224 47687 36112 59005
X_2 = 0.00029 08882 04563 42418 99926 89079 76325
X_3 = 0.00029 08882 04563 42459 63740 22324 76527
X_4 = 0.00029 08882 04563 42459 63742 97415 55378
X_5 = 0.00029 08882 04563 42459 63742 97415 74
X_6 = 0.00029 08882 04563 42459 63742 97415 74

При $X_6 = X_5$расчет закончен.

$sin1'$ = 0.00029 08882 04563 42459 63742 97415 74

$cos1'$ = 0.99999 99576 92025 32795 12624 87173 34

$$sin30'' = \sqrt{(1 - cos1')/2} = 0.00014\ 54441\ 03820\ 07367\ 14773\ 93983\ 57667$$

Для нахождения значения sin10″ используем формулу (1), приняв первоначальное приближенное значение $x_0 \cong sin10'' \cong sin30''/3 = 0.00014544/3 = 0.00004848$

Результаты вычислений последовательных приближений по рабочей формуле:

$$x_{n+1} = \frac{sin30''}{3 - 4x_n^2}$$

приводим ниже:

X_1 = 0.00004 84813 68091 95290 86694 58097 9336 72

X_2 = 0.00004 84813 68091 96148 35411 0972 55971 27

X_3 = 0.00004 84813 6809196148 35411 51001 96468 2

X_4 = 0.00004 84813 6809196148 35411 51001 96501 9

X_5 = 0.00004 84813 6809196148 35411 51001 96501 9

При $X_5 = X_4$ расчет закончен.

$sin10'' = 0.00004\ 84813\ 68091\ 96148\ 35411\ 51001\ 96501\ 9$

$cos10'' = 0.99999\ 99988\ 24778\ 47327\ 52966\ 51948\ 49$

$$sin5'' = \sqrt{\frac{1 - cos10''}{2}} = 0.00002\ 42406\ 84053\ 10278\ 52020\ 56404\ 61511$$

Для нахождения значения sin1″ используем формулу (2), приняв первоначальное приближенное значение $x_0 \cong sin1'' = sin5''/5 = 0.00002424/5 = 0.000004848$

Результаты вычислений последовательных приближений по рабочей формуле

$$x_{n+1} = \frac{sin5''}{5 - 20x_n^2 + 16x_n^2}$$

приводим ниже.

X_1 = 0.00000 48481 36811 07634 20951 10533 51299 38

X_2 = 0.00000 48481 36811 07636 78200 79086 10371 09

X_3 = 0.00000 48481 36811 07636 78200 79090 94091 68

X_4 = 0.00000 48481 36811 07636 78200 79090 94091 68

При $X_4 = X_3$расчет закончен.

$sin1'' = 0.00000\ 48481\ 36811\ 07636\ 78200\ 79090\ 94091\ 68$

$cos1'' = 0.99999\ 99999\ 88247\ 78473\ 04740\ 76217\ 93$

Таким образом, значение синусов и косинусов малых углов определены (число верных цифр и шаг угла выбирает составитель по своему желанию) можно строить таблицу.

В данной статье показано, что наряду с традиционным методом построения таблиц синусов и косинусов в те далекие времена, когда еще не была открыта высшая математика гениальным ученым Ньютоном, был и другой способ, менее трудоемкий, но, к сожалению, не открытый в свое время.

Примечание.

Этим способом можно определить значения $sin\left(\frac{1}{10}\right)''$, $sin\left(\frac{1}{100}\right)''$ и т.д.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Доказать: $cos36^0 - sin18^0 = 0.5$ (3)

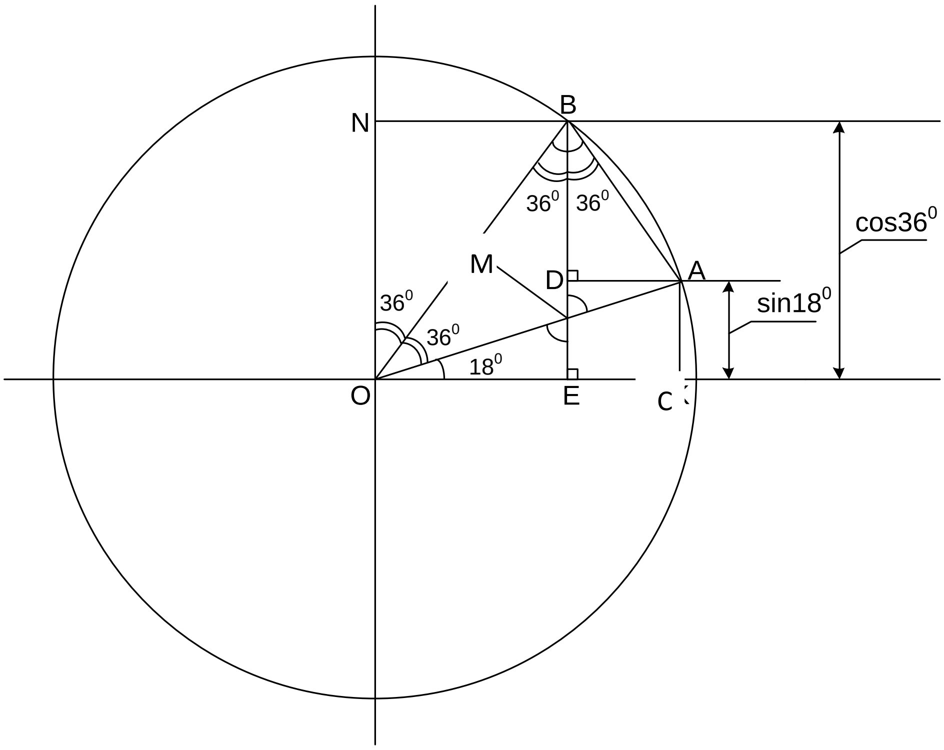

Рис. 1. Геометрическое представление тождества (3)

OB = R = 1.

$\llcorner AOK = 18^0$; $\llcorner BOA = 36^0$.

$\llcorner NOB = 90^0 - (18^0 + 36^0) = 36^0$.

$BD = \cos 36^0 - \sin 18^0$.

Решение:

ΔAOB – равнобедренный, так как OB = OA = R, $\llcorner OBA = \llcorner OAB = (180^0 - 36^0)/2 = 72^0$. ΔOBC – равнобедренный, так как $\llcorner BOC = \llcorner OBC = 36^0$, $MC \perp OB$; OM = MB = 0.5. ΔABC – равнобедренный, так как $\llcorner BCA = \llcorner OCE = \llcorner BAC = 72^0$; AB = BC. $\Delta ABD = \Delta BMC$ – по стороне и 2 углам. Следовательно, BM = BD = 0.5

Определение значений $sin 18^0 и\ cos 18^0$:

$cos36^0 - sin18^0 = 0.5$; $\quad cos^2 18^0 - sin^2 18^0 - sin18^0 = 0.5$;

$1 - sin^2 18^0 - sin^2 18^0 - sin18^0 = 0.5$;

$1 - 2sin^2 18^0 - sin18^0 = 0.5$; $\quad sin18^0 = x$;

$1 - 2x^2 - x = 0.5$; $\quad 2x^2 + x - 0.5 = 0$;

$x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot 0.5}}{2 \cdot 2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}$; $\quad sin18^0 = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$;

$$cos18^0 = \sqrt{1 - sin^2 18^0} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}};$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

2.1 Вывод формулы sin5α:

$sin5\alpha = sin(3\alpha + 2\alpha) = sin3\alpha \cdot cos2\alpha + cos3\alpha \cdot sin2\alpha =$

$= (3sin\alpha - 4sin^3\alpha)(cos^2\alpha - sin^2\alpha) + (4cos^3\alpha - 3cos\alpha) \cdot 2sin\alpha \cdot cos\alpha =$

$= 3sin\alpha \cdot cos^2\alpha - 3sin\alpha \cdot sin^2\alpha - 4sin^3\alpha \cdot cos^2\alpha + 4sin^5\alpha + 8cos^4\alpha \cdot sin\alpha$

$-6cos^2\alpha \cdot sin\alpha = 3sin(1 - sin^2\alpha) - 3sin^2\alpha - 4sin^3\alpha(1 - sin^2\alpha) +$

$+4sin^5\alpha + 8(1 - sin^2\alpha)^2 sin\alpha - 6(1 - sin^2\alpha) \cdot sin\alpha =$

$3\sin\alpha - 3sin^3\alpha - 3sin^3\alpha - 4sin^3\alpha + 4sin^5\alpha + 4sin^5\alpha + 8sin\alpha -$

$-16sin^3\alpha + 8sin^5\alpha - 6sin\alpha + 6sin^3\alpha = 5sin\alpha - 20sin^3\alpha + 16sin^5\alpha$;

2.2 Вывод формулы нахождения sinα при известном sin5α методом последовательных приближений:

$$sin5\alpha = sin\alpha(5 - 20sin^2\alpha + 16sin^4\alpha);$$

$$sin\alpha = \frac{sin5\alpha}{5 - 20sin^2\alpha + 16sin^4\alpha};$$

Если sinα = x;

$$x_{n+1} = \frac{sin5\alpha}{5 - 20x_n^2 + 16x_n^4}$$

$$x_0 \approx \frac{sin5\alpha}{5}$$

Список литературы

1. *Выгодский М.Я.* Справочник по элементарной математике. Государственное издательство технико-теоретической литературы. М, 1955 г.