Наиболее общее описание связи между тензорами напряжений и деформаций в нелинейных изотропных средах
Ошхунов М.М.

Ошхунов Муаед Музафарович / Oshkhunov Muaed Muzafarovich – доктор технических наук, профессор,
кафедра вычислительной математики,
институт физики и математики,
Кабардино-Балкарский государственный университет, г. Нальчик

Аннотация: *Предлагается общая полиномиальная связь между тензорами напряжений и деформаций в изотропных нелинейных средах. Предполагается, что определяющие функции, входящие в этот закон, зависят от трех инвариантов тензора напряжений или деформаций. В частных случаях данная зависимость переходит в известные более простые законы связи между напряжениями и деформациями в нелинейных средах. Даны условия, обеспечивающие корректность известных теорем механики деформируемого твердого тела, как принцип Лагранжа (минимум потенциальной энергии) и принцип Кастильяно (минимум дополнительной работы).*
Ключевые слова: *тензор напряжений и деформаций, определяющие законы для описания нелинейных свойств механики, принцип Лагранжа, принцип Кастильяно, вариационные теоремы.*

Рассмотрим классическую модель теории упругости, состоящую из уравнений равновесия
$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0, \tag{1}$$
соотношений Коши между тензором напряжений σ_{ij} и деформацией ε_{ij} вида
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right), \tag{2}$$
связи между тензором напряжений и деформаций в виде полинома
$$\sigma_{ij} = \varphi_0\delta_{ij} + \varphi_1\varepsilon_{ij} + \varphi_2\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj} + \cdots \tag{3}$$
$\sigma_{ij} = \varphi_0\delta_{ij} + \varphi_1\varepsilon_{ij} + \varphi_2\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj} + \cdots$Здесь в формулах (1)-(3) запятая означает дифференцирование по соответствующей декартовой координате, по повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до 3, u_i – неизвестные значения перемещения сплошной среды под действием внешних нагрузок, δ_{ij} – тензор Кронокера, X_i – компоненты массовых сил, φ_0, φ_1, φ_2 зависят от трех инвариантов тензора деформаций E_1, E_2, E_3.

Выберем в качестве независимых инвариантов тензора деформаций значения
$$\begin{gathered} E_1 = \varepsilon_{ij}\delta_{ij}, \\ E_2 = \sqrt{\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}}, \\ E_3 = \sqrt[3]{\varepsilon_{ik}\varepsilon_{kj}\varepsilon_{ij}}. \end{gathered} \tag{4}$$
Чтобы завершить построение математической модели деформирования сплошной среды с нелинейными свойствами необходимо задать граничные условия смешанного типа
$$u_{i|S_1} = u_i^0, \;\; \sigma_{ij}n_{j|S_2} = \sigma_i^0, \;\; i, j = 1,2,3. \tag{5}$$
Здесь u_i^0, σ_i^0 – заданные значения перемещения и напряжения на поверхностях S_1 и S_2 соответственно, $S = S_1 + S_2$ – полная поверхность тела, n_j – направляющие косинусы единичного вектора, перпендикулярного к поверхности S_2.

В соответствии с известной теоремой Келли Гамильтона симметричный тензор второго ранга удовлетворяет своему характеристическому уравнению, которое, очевидно, для тензора σ_{ij} будет уравнением третьего порядка. Следовательно, любые тензорные степени выше второго можно выразить через слагаемые второй и первой степени, а также единичную матрицу Кронекера δ_{ij}. Из этого следует, что полиномиальное разложение вида (3) является наиболее общим представлением между тензорами напряжений и деформаций в виде ряда Тейлора.

Представление (3) содержит как частный случай известные законы, описывающие свойства нелинейных материалов в частности теорию малых упруго-пластических деформаций А.А. Ильюшина [1], двухинвариантные модели Д.Л. Быкова [2], а также модели, учитывающие влияние температуры, М.М. Ошхунова [3, 4].

Для специального вида представления (3), когда вместо тензора деформаций ε_{ij} используется его девиатор $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{\theta}{3}\delta_{ij}$, $\theta = E_1$. В работах [5] получены условия, обеспечивающие справедливость теоремы о минимуме потенциальной энергии (принцип Лагранжа). В случае, когда соотношения (3) обратимы и тензор деформаций разлагается в ряд по степеням тензора напряжений в виде полинома, в работе [6] получены условия минимума дополнительной работы (принцип Кастильяно). В частных случаях из этих условий следует широко известные ограничения, полученные в работах [1, 2]. В работе [7] рассматриваются условия сходимости итерационных процессов в пространстве С.Л. Соболева, сводящих решение нелинейной задачи к решению последовательности линейных задач.

Литература

1. *Ильюшин А.А. Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязко-упругости. М.: Наука, 1970. 281 с.
2. *Быков Д.Л., Ильюшин А.А., Огибалов П.М., Победря Б.Е.* Некоторые основные проблемы теории термовязко-упругости // Механика композитных материалов. 1971. № 1. С. 41.
3. *Ошхунов М.М.* О скорости сходимости итерационных процессов нелинейной упругости // Прикладная механика. 1995. Т. 31. С. 117.
4. *Комаров Г.Н., Ошхунов М.М.* О разрешимости физически нелинейных задач теории упругости // Украинский математический журнал. 1996. № 6. С. 132.
5. *Oshkhunov M.M., Ozden S.* The general stress and strain relationship in non-linear materials // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2000. № 35. P. 763-767.
6. *Oshhkunov M.M., Ozden S.* The conditions of minimum potential energy and Castigliano’s functional in non-linear media // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2003. № 38. P. 71-77.
7. *Nagoev Z.V., Oshkhunov M.M.* Discrete-dynamic particle method in problems of mechanics of deformable solids // Mechanics of Solids. 2011. T. 46. № 4. C. 622-634.